

Gelman B.D., Afonina S.N. SEALING DISTURBANCE SURJECTIVE. SOME APPLICATIONS  
This work is devoted to the study of condensing perturbations of closed linear surjective operators. Some received theorems are applied to the study of some neutral type level classes.

*Key words:* measure noncompactness; surjective operator; condensing map.

УДК 517.986.6

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова

*Ключевые слова:* сюръективный оператор; непрерывный линейный оператор; многозначные уплотняющие отображения; дифференциальные включения.

Данная статья посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений непрерывных линейных сюръективных операторов. В ней рассматривается теорема о разрешимости одного класса операторных включений с сюръективными операторами. Полученная теорема применяется для изучения разрешимости вырожденных дифференциальных включений.

Пусть  $E, E_0$  – банаховы пространства,  $A: E \rightarrow E_0$  – ограниченный линейный сюръективный оператор,  $F: D(F) \subset E \rightarrow K_v(E_0)$  – полунепрерывное сверху многозначное отображение. Пусть в  $E_0$  задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности  $\psi$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** *Отображение  $F$  называется  $(A, \psi)$ -уплотняющим, если для любого ограниченного множества  $Q \subset D(F)$  из неравенства  $\psi(F(Q)) \geq \psi(A(Q))$  вытекает равенство  $\psi(A(Q)) = 0$ .*

Пусть  $x_0 \in E$  – некоторая точка,  $B_R[x_0]$  – замкнутый шар радиуса  $R$  с центром в  $x_0$ ,  $F: B_R[x_0] \rightarrow K_v(E_0)$  – многозначное  $(A, \psi)$ -уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение  $A(x) \in F(x)$ . Пусть  $N(A, F)$  – множество решений этого включения. Имеет место следующая теорема (см. [1]).

**Т е о р е м а 1.** *Если существует такое число  $k > \|A^{-1}\|$ , что для любой точки  $x \in B_R[x_0]$  справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} \|A(x_0) - u\| \leq \frac{R}{k},$$

*то  $N(A, F) \neq \emptyset$ .*

Рассмотрим приложение этой теоремы к изучению разрешимости одного класса вырожденных дифференциальных включений в банаховом пространстве.

Пусть  $E_1, E_2, E_3$  – банаховы пространства,  $A: E_1 \rightarrow E_2$  – непрерывный линейный оператор,  $B: E_1 \rightarrow E_3$  – непрерывный линейный оператор, подчиненный оператору  $A$ , т.е.  $\|B(x)\| \leq \|A(x)\|$  для любого  $x \in E_1$ . Тогда естественно определяются отображения  $\hat{A}: C_{([0, T], E_1)} \rightarrow C_{([0, T], E_2)}$  и  $\hat{B}: C_{([0, T], E_1)} \rightarrow C_{([0, T], E_3)}$  по следующему правилу:

$$\hat{A}(x)(t) = A(x(t)), \quad \hat{B}(x)(t) = B(x(t)).$$

Пусть многозначное отображение  $F_1 : [0, T] \times B_R[x_0] \rightarrow K_v(E_2)$  является вполне непрерывным, а многозначное отображение  $F_2 : [0, T] \times E_3 \rightarrow K_v(E_2)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $F_2$  – непрерывно по совокупности переменных;
- 2) существует такое  $\alpha$ , что для любого  $t \in [0, T]$  и для любых  $y_1, y_2 \in E_1$  такие, что

$$h(F(t, y_1), F(t, y_2)) \leq \alpha \|y_1 - y_2\|.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$(A(x(t)))' \in F_1(t, x(t)) + F_2(t, B(x(t))), \quad (1)$$

$$A(x(0)) = Ax_0. \quad (2)$$

Решением задачи (1), (2) на промежутке  $[0, l], 0 < l \leq T$  будем называть непрерывную функцию  $x_*$ , определенную на  $[0, l]$ , такую, что

$$(A(x_*(t)))' \in F_1(t, x_*(t)) + F_2(t, B(x_*(t))),$$

$$A(x_*(0)) = Ax_0.$$

Обозначим  $\Sigma(x_0, [0, l])$  множество решений задачи (1), (2) на промежутке  $[0, l]$ .

Дадим операторную трактовку задачи (1), (2).

Пусть число  $l \in (0, T]$ ,  $u \in C_{([0, l], Ker A)}$ . Нетрудно заметить, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному включению

$$\hat{A}(x)(t) \in \int_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + \int_0^t u(s)ds + A(x_0), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{P}_{F_1}(x) = \{v \in L^1_{([0, l], E_2)} \mid v(s) \in F_1(s, x(s)) \text{ для п. в. } s \in [0, l]\}, \quad (4)$$

а отображение

$$\mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x)) = \{w \in L^1_{([0, l], E_2)} \mid w(s) \in F_2(s, B(x(s))) \text{ для п. в. } s \in [0, l]\}. \quad (5)$$

Рассмотрим многозначное отображение  $V : C_{([0, l], E_1)} \rightarrow K_v(C_{([0, l], E_2)})$ ,

$$V(x)(t) = \int_0^t \mathcal{P}_{F_1}(x)(s)ds + \int_0^t \mathcal{P}_{F_2}(\hat{B}(x))(s)ds + A(x_0)$$

Очевидно, что любое решение операторного включения  $\hat{A}(x) \in V(x)$  является решением задачи (1), (2) (см. [3]).

**Л е м м а 1.** Если число  $l > 0$  достаточно мало, то многозначное отображение  $V$  является  $(\hat{A}, \chi)$ -уплотняющим, где  $\chi$  – мера некомпактности Хаусдорфа.

Опираясь на теорему 1, можно доказать следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.** При сделанных предположениях найдется такое число  $l_0 > 0$ , что  $\Sigma(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялова А.В. Об уравнениях с  $(A, \psi)$ -уплотняющими отображениями // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж, 2013. С. 92-93.

2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений. М.: КомКнига (URSS), 2005.

3. Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных включений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Математика, физика. Воронеж, 2007. № 2. С. 86-91.

Gelman B.D., Zavyalova A.V. CLASS OF DEGENERATE DIFFERENTIAL INCLUSIONS

This article focuses on the study of multivalued condensing perturbations surjective continuous linear operators. It considers the theorem on the solvability of a class of operator inclusions with surjective operators. The resulting theorem is used to study the solvability of degenerate differential inclusions.

*Key words:* surjective operator continuous linear operator-valued condensing mapping; differential inclusions. УДК 517.958

## УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

© Ю.А. Гнилицкая, В.В. Провоторов

*Ключевые слова:* краевые и начально-краевые задачи на графе; обобщенное решение; однозначная разрешимость; оптимальное управление.

Рассматриваются обобщенные решения краевой и начально-краевых задач с распределенными параметрами на произвольном геометрическом графе. Ставится задача оптимального управления дифференциальными системами в терминах минимизации некоторого функционала и получения необходимых и достаточных условий существования минимума функционала.

В классе  $W_2^1(\Gamma)$  ( $\Gamma$  — произвольный компактный ориентированный граф;  $W_2^1(\Gamma)$  — пространство функций из  $L_2(\Gamma)$ , имеющих первую обобщенную производную из  $L_2(\Gamma)$ , норма в  $W_2^1(\Gamma)$  определяется скалярным произведением  $(\varphi, \psi)_{W_2^1(\Gamma)} \equiv \int_{\Gamma} \left( \varphi \psi + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) dx$ ) рассматривается эллиптическая система, описываемая задачей Дирихле

$$L(y, \psi) \equiv \int_{\Gamma} a(x) \frac{dy(x)}{dx} \frac{d\psi(x)}{dx} + b(x)y(x)\psi(x) = \int_{\Gamma} f(x)\psi(x)dx + \int_{\Gamma} Bu(x)\psi(x)dx \quad (1)$$

для любых  $y(x) \in W_{2,0}^1(\Gamma)$  ( $W_{2,0}^1(\Gamma)$  — замыкание в норме  $W_2^1(\Gamma)$  множества непрерывных во всех узлах графа  $\Gamma$  функций класса  $W_2^1(\Gamma)$ , для которых сужения  $(a(x) \frac{dy(x)}{dx})_{\gamma}$  на ребра  $\gamma \in \Gamma$  непрерывны в концевых точках ребер  $\gamma$ , принадлежащих множеству внутренних узлов  $\Gamma$ , и для которых выполняются соотношения

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx} \quad (2)$$

вместе с краевыми условиями  $y|_{\partial\Gamma} = 0$ , где  $R(\xi)$ ,  $r(\xi)$  — число ребер, примыкающих к узлу  $\xi$  и ориентированных «к узлу  $\xi$ » и «от узла  $\xi$ », соответственно),  $f(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $u(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $B$  — линейный непрерывный оператор в  $L_2(\Gamma)$ . Коэффициенты  $a(x)$ ,  $b(x)$  — измеримые ограниченные функции на  $\Gamma$ :

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$